北陸大学 紀要
第15号 (1991)
pp. 253〜262

多変数フーリエ級数の Bochner-Riesz means の operator norm に関する評価（II）

小 嶋 迪 孝

Estimates for the operator norm of Bochner-Riesz means of multiple Fourier series (II)

Michitaka Kojima

Received October 1, 1991

Summary

In this note we give an estimate from below for the magnitude of the operator norm $\| S_R \|_{L^p}$ of spherical partial sums of n-dimensional Fourier series for $\frac{2n}{n+1} \leqq p \leqq \frac{2n}{n-1}$, $p \neq 2$.

$\boldsymbol{R}^n$ を n ($\geqq 2$) 次元ユークリッド空間とし，その元 $x=(x_1, \cdots, x_n)$，$y=(y_1, \cdots, y_n)$ に対して $(x, y)=\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$，$|x|=(x, x)^{\frac{1}{2}}$ とする。$\boldsymbol{Z}^n$ を $\boldsymbol{R}^n$ の格子点全体の集合，$T^n=[-\pi, \pi)^n \simeq \boldsymbol{R}^n / 2\pi \boldsymbol{Z}^n$ を n 次元トーラスとする。$L^p(T^n)$ ($1 \leqq p < \infty$) を p 乗ルベーク可積分関数全体の集合，$L^\infty(T^n)$ を本質的に有界なルベーク可測関数全体の集合とし，$\|f\|_p$ をそれらの関数 f のノルムとする。

$\alpha \geqq 0$ に対して $f \in L^1(T^n)$ のフーリエ級数の α 次の Bochner-Riesz mean を

$$S_R^\alpha(f:x)=\sum_{|m|<R}\left(1-\frac{|m|^2}{R^2}\right)^\alpha \hat{f}_m e^{i(m, x)}$$

と表す。ここに

$$\hat{f}_m=(2\pi)^{-n}\int_{T^n} f(x) e^{-i(m, x)}\, dx \quad (m \in \boldsymbol{Z}^n).$$

$\| S_R^\alpha \|_{L^p}$ を $f \in L^p(T^n)$ から $S_R^\alpha(f) \in L^p(T^n)$ への operator norm とする。論文 [4] で，領域 $\left\{(\alpha, p): 1 \leqq p \leqq \frac{2n}{n+1},\ 0 \leqq \alpha \leqq n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right\}$ における (α, p) に対して，$\| S_R^\alpha \|_{L^p}$ が $+\infty$ に発散する速さについての下からの評価を与えた。

本稿では $\alpha=0$ の場合を考える。記号を簡単にして $S_R^0(f:x)$ を $S_R(f:x)$ と表すことにする。C. Fefferman [2] によって，$\frac{2n}{n+1} \leqq p \leqq \frac{2n}{n-1}$，$p \neq 2$ に対して

---

*教 養 部
Faculty of General Education

$$\lim_{R\to\infty}\|S_R\|_{L^p}=+\infty$$

であることが証明されている。我々はここでもこの$+\infty$に発散する速さについて下からの評価を与えるが，その方法は［4］と同様K. I. Babebkoの論文［1］と同じくするものである。

証明する定理は次のものである。

定理 $\dfrac{2n}{n+1}\leqq p\leqq\dfrac{2n}{n-1}$，$p\neq 2$ に対して

$$\|S_R\|_{L^p}\geqq C\,(\log R)^{(n-1)\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|}$$

ここにCはRには無関係なある定数を表す。

証明の方針を述べる。共役の理論によって$\dfrac{2n}{n+1}\leqq p<2$の場合と$2<p\leqq\dfrac{2n}{n-1}$の場合とは同値であり，ここでは後者の場合を考えることにする。$\|S_R(f)\|_p\leqq\|S_R\|_{L^p}\|f\|_p$であるから，任意の関数列$\{f_j\}\subset L^p(T^n)$に対して，Rademacher関数列に関するKhintchinの定理を用いると，

$$\Big\|\{\sum_j|S_R(f_j)|^2\}^{\frac{1}{2}}\Big\|_p\leqq C_p'\|S_R\|_{L^p}\Big\|\{\sum_j|f_j|^2\}^{\frac{1}{2}}\Big\|_p$$

が得られる。ここに$C_p=\left(\dfrac{p}{2}+1\right)^{\frac{1}{2}}$である。そうすると任意の集合$\mathrm{B}\subset T^n$に対してHölderの不等式より

$$\int_{\mathrm{B}}\sum_j|S_R(f_j:x)|^2dx\leqq|\mathrm{B}|^{1-\frac{2}{p}}\Big[\int_{\mathrm{B}}\{\sum_j|S_R(f_j:x)|^2\}^{\frac{p}{2}}dx\Big]^{\frac{2}{p}}$$

$$\leqq|\mathrm{B}|^{1-\frac{2}{p}}\Big\|\{\sum_j|S_R(f_j)|^2\}^{\frac{p}{2}}\Big\|_p^2$$

$$\leqq \mathrm{C}(\|S_R\|_{L^p})^2|\mathrm{B}|^{1-\frac{2}{p}}\Big\|\{\sum_j|f_j|^2\}^{\frac{p}{2}}\Big\|_p^2$$

が得られる。この式より$\|S_R\|_{L^p}$の下限を求めるために，我々は適当な集合$\mathrm{B}\subset T^n$と関数族$\{f_j\}\subset L^p(T^n)$を構成するわけであるが，それらは次の性質をもつものである：十分大きなRに対し

$$\sup_j\|f_j\|_\infty\leqq 1,$$

$\mathrm{supp}\,f_j\subset\mathrm{R}_j\subset T^n$，$\{\mathrm{R}_j\}$は互いに素な矩形の族，

そして

$$|\mathrm{B}|=O\big((\log R)^{-(n-1)}\sum_j|\mathrm{R}_j|\big),$$

$$\int_{\mathrm{B}}|S_R(f_j:x)|^2dx\geqq C|\mathrm{R}_j|$$

である。そうすると

$$\Big\|\{\sum_j|f_j|^2\}^{\frac{1}{2}}\Big\|_p\leqq\{\sum_j|\mathrm{R}_j|\}^{\frac{1}{p}}$$

であり，従ってある定数C_1，$C_2>0$が存在して

$$C_1\sum_j|\mathrm{R}_j|\leqq C_2|\mathrm{B}|^{1-\frac{2}{p}}(\|S_R\|_{L^p})^2\{\sum_j|\mathrm{R}_j|\}^{\frac{2}{p}}$$

が成り立つ。故に

$$(\| S_R \|_{L^p})^2 \geq \frac{C_1}{C_2} | \mathrm{B} |^{-(1-\frac{2}{p})} \{ \sum_j | \mathrm{R}_j | \}^{1-\frac{2}{p}} \geq C_3 (\log R)^{(n-1)(1-\frac{2}{p})},$$

$$\text{i.e.} \quad \| S_R \|_{L^p} \geq C (\log R)^{(n-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}$$

が得られ，定理が示されることになる。

§1. ピラミッドの族 $\{\mathrm{P}_j\}$ の構成

$\boldsymbol{R}^n = \boldsymbol{R}^{n-1} \times \boldsymbol{R}^1$ において，$(n-1)$ 次元立方体 $\mathrm{G} \subset \boldsymbol{R}^{n-1}$ 及び点 $x^0 \in \boldsymbol{R}^{n-1} \times \boldsymbol{R}_+^1$ を与えたとき，集合 $\mathrm{G} \cup \{x^0\}$ の最小の凸包をピラミッドと云い，$\mathrm{P} = \mathrm{P}(\mathrm{G},\ x^0)$ で表す。このとき，G を基，x^0 を頂点と云う。またこれを含む最小の凸錐を $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathrm{G},\ x^0)$ で表す。

基を G，頂点を $x^0 = (x^0{}_1, \cdots, x^0{}_{n-1}, h_0)(h_0 > 0)$ としたピラミッド $\mathrm{P} = \mathrm{P}(\mathrm{G},\ x^0)$ から，$h_1 > h_0$ に対して 2^{n-1} 個のピラミッドの族 $\{\mathrm{P}_j\}$ を次の様に構成する。P を超平面 $\left\{ x \in \boldsymbol{R}^n : x_n = \frac{h_0 h_1}{2h_1 - h_0} \right\}$ で切ると切口は $(n-1)$ 次元立方体である。それを G′ と表す。次に G の頂点を $\{x^j\}$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^{n-1})$ とし，各 x^j に対し x^j と x^0 を通る直線を引き，その直線上に超平面 $\{\mathrm{x} \in \boldsymbol{R}^n : x_n = h_1\}$ との交点 x^{0j} をとる。G′ を含み頂点を x^{0j} とした最小の凸錐 $\mathbf{P}_j$ と座標平面 $\{x \in \boldsymbol{R}^n : x_n = 0\}$ との共通部分を y^0 とすると，G_j は，一辺の長さが $\frac{1}{2}$ (G の一辺の長さ) で，中心 (y^j と表す) が G の中心 (y^0 と表す) と x^j を結んだ線分の中点である立方体となる。これによって 2^{n-1} 個のピラミッド $\mathrm{P}_j = \mathrm{P}(\mathrm{G}_j,\ x^{0j})$ が構成される (図1)。

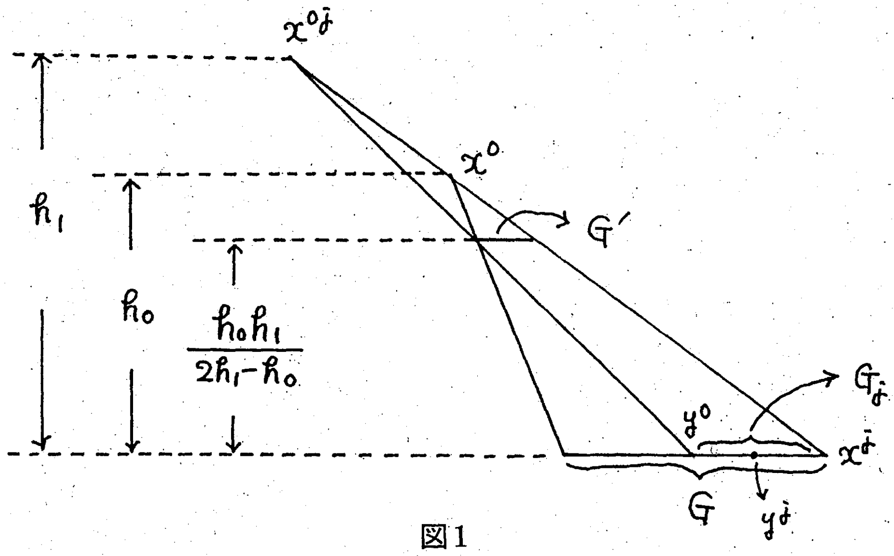

図1

これらのピラミッドの族 $\{\mathrm{P}_j\}$ は全て立方体 G′ を含んでいて，その基の族 $\{\mathrm{G}_j\}$ は互いに境界でしか共有点を持たず，$\mathrm{G} = \bigcup_j \mathrm{G}_j$ であり，凸錐の族 $\{\mathbf{P}_j = \mathbf{P}(\mathrm{G}_j,\ x^{0j})\}$ は半平面 $\{x \in \boldsymbol{R}^n : x_n < 0\}$ では互いに素であると云う性質を持っている。また x^0，x^j，x^{0j}，y^0，y^j の間には次の関係がある：

(1) $\quad x^{0j} = \dfrac{h_1}{h_0} x^0 + \left(1 - \dfrac{h_1}{h_0}\right) x^j$

(2) $\quad x^{0j} - y^j = \dfrac{h_1}{h_0}(x^0 - \mathrm{y}^0) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{h_1}{h_0}\right)(x^j - y^0).$

また集合$\bigcup_j P_j$の体積は次の様になる：

(3)　$$|\bigcup_j P_j|=\frac{h_0}{n}|G|+\frac{2^{n-1}}{n}\frac{(h_1-h_0)^n}{(2h_1-h_0)^{n-1}}|G|,$$

ここに右辺の第1項はピラミッドPの体積で，第2項は増分の体積である。

§2. 集合Bの構成

$0<h_0<h_1<h_2<\cdots<h_k$が与えられたものとする。高さh_0なる頂点x^0を持ち，基をGとしたピラミッド$P=P(G, x^0)$を考え，Gの中心をy^0とする。このPを0階のピラミッドと呼ぶ。このピラミッドから§1で導入した構成方法によって高さがh_1なる2^{n-1}個のピラミッド$P_{j_1}=P(G_{j_1}, x^{0j_1})$を構成し，$G_{j_1}$の中心を$y^{j_1}$とする。この$P_{j_1}$を1階のピラミッドと呼び，$B_1=\bigcup_{j_1}P_{j_1}$とおく。1階のピラミッドから同様にして高さが$h_2$なる$2^{2(n-1)}$個のピラミッド$P_{j_1j_2}=P(G_{j_1j_2}, x^{0j_1j_2})$を構成し，$G_{j_1j_2}$の中心を$y^{j_1j_2}$とする。この$P_{j_1j_2}$を2階のピラミッドと呼び，$B_2=\bigcup_{j_1j_2}P_{j_1j_2}$とおく。以下同様にして高さが$h_k$なる$2^{k(n-1)}$個の$k$階のピラミッド$P_{j_1\cdots j_k}=P(G_{j_1\cdots j_k}, x^{0j_1\cdots j_k})$を構成し，$G_{j_1\cdots j_k}$の中心を$y^{j_1\cdots j_k}$とし，$B_k=\bigcup_{j_1\cdots j_k}P_{j_1\cdots j_k}$とおく。$k$階の各ピラミッドは，Gのある頂点$x^{j_1}$, G_{j_1}のある頂点$x^{j_1j_2}$, $G_{j_1j_2}$のある頂点$x^{j_1j_2j_3}$, …, $G_{j_1\cdots j_{k-1}}$のある頂点$x^{j_1\cdots j_k}$によって決定される。

(2)(3)によって次が成り立つ：

(4)　$$x^{0j_1\cdots j_k}-y^{0j_1\cdots j_k}=\frac{h_k}{h_0}(x^0-y^0)+\sum_{l=1}^{k}\frac{h_k}{h_l}\left(\frac{1}{2}-\frac{h_l}{h_{l-1}}\right)(x^{j_1\cdots j_l}-y^{j_1\cdots j_{l-1}}),$$

(5)　$$|B_k|=\frac{h_0}{n}|G|+\frac{2^{n-1}}{n}\sum_{l=1}^{k}\frac{(h_l-h_{l-1})^n}{(2h_l-h_{l-1})^{n-1}}|G|.$$

与えられた十分大きなRに対して，G, x^0, k, h_kを適当に選んで出来るB_kが我々の必要とする集合Bとなるのである。我々はこれらを次の様にとる。$\varepsilon>0$を十分小さいものとする。$a=R^{-\frac{n-1}{n}}$, $h_0=\frac{1}{\varepsilon}a$, $k=[\varepsilon\log_2 R]$（従って$2^k\sim R^\varepsilon$）ととり

$$G=\{x=(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0)\in\boldsymbol{R}^n : |x_j|\leqq a\ (j=1, \cdots, n-1)\},$$

$$x^0=(0, \cdots, 0, h_0)\in\boldsymbol{R}^n,$$

$$h_l=(l+1)^n h_0\ (l=1, \cdots, k)$$

とおく。$\frac{a}{h_0}=\varepsilon$は十分小であることに注意する。そして$R$を十分大きくとれば，$a$, $h_k=(k+1)^n h_0$は十分小さくなるから$B\subset\boldsymbol{T}^n$となることに注意する。

§3. 矩形の族$\{R_j\}$の構成

ピラミッド$P_{j_1\cdots j_k}=P(G_{j_1\cdots j_k}, x^{0j_1\cdots j_k})$に対して，その方向と云うのを，基$G_{j_1\cdots j_k}$の中心$y^{j_1\cdots j_k}$から頂点$x^{0j_1\cdots j_k}$へのベクトルの方向と定義する。この方向の単位ベクトルを$v^{j_1\cdots j_k}$と書くことにする。このとき

$$\delta_1=|x^{0j_1\cdots j_k}-y^{j_1\cdots j_k}|$$

とおくと，(4)によって，

(6)　$$\delta_1=h_k\left\{1+O\left(\left(\frac{a}{h_0}\right)^2\right)\right\}=h_k\{1+O(\varepsilon^2)\}$$

そして

(7)　$v_n^{j_1\cdots j_k}=\dfrac{h_k}{\delta_1}=1+O\left(\left(\dfrac{a}{h_0}\right)^2\right)=1+O(\varepsilon^2)$

であることが示される。従って ε を十分に小さくとれば，各ベクトル $v^{j_1\cdots j_k}$ は x_n ー座標軸に沿っての単位ベクトルとほとんど違わないものと考えることが出来る。

さて矩形の族 $\{R_j\}$ を次の様に構成する。凸錐 $P_{j_1\cdots j_k}=P(G_{j_1\cdots j_k},\ x^{0j_1\cdots j_k})$ の軸と云うのを，$y^{j_1\cdots j_k}$ と $x^{0j_1\cdots j_k}$ を結んで出来る直線と定義する。この軸上に点 $z^{j_1\cdots j_k}$ を下半平面 $\{x\in R^n : x_n<0\}$ の中に $|y^{j_1\cdots j_k}-z^{j_1\cdots j_k}|=\delta_1$ となる様にとる。この点を通ってこの軸に垂直な超平面でこの錐を切ると，その切口には，一辺の長さ δ が $2\cdot\dfrac{2a}{2^k}\{1+O(\varepsilon)\}$，中心が $z^{j_1\cdots j_k}$ なる立方体が含まれる。このことは(7)と立方体 $G_{j_1\cdots j_k}$ の一辺の長さが $\dfrac{2a}{2^k}$ であることより分る。この立方体を基とし，軸をこの軸とし，高さを δ_1 とした矩形を作る。これを $R_{j_1\cdots j_k}$ と表す。これは凸錐 $P_{j_1\cdots j_k}$ に含まれ，またこれらの族は互いに素である（図2）。

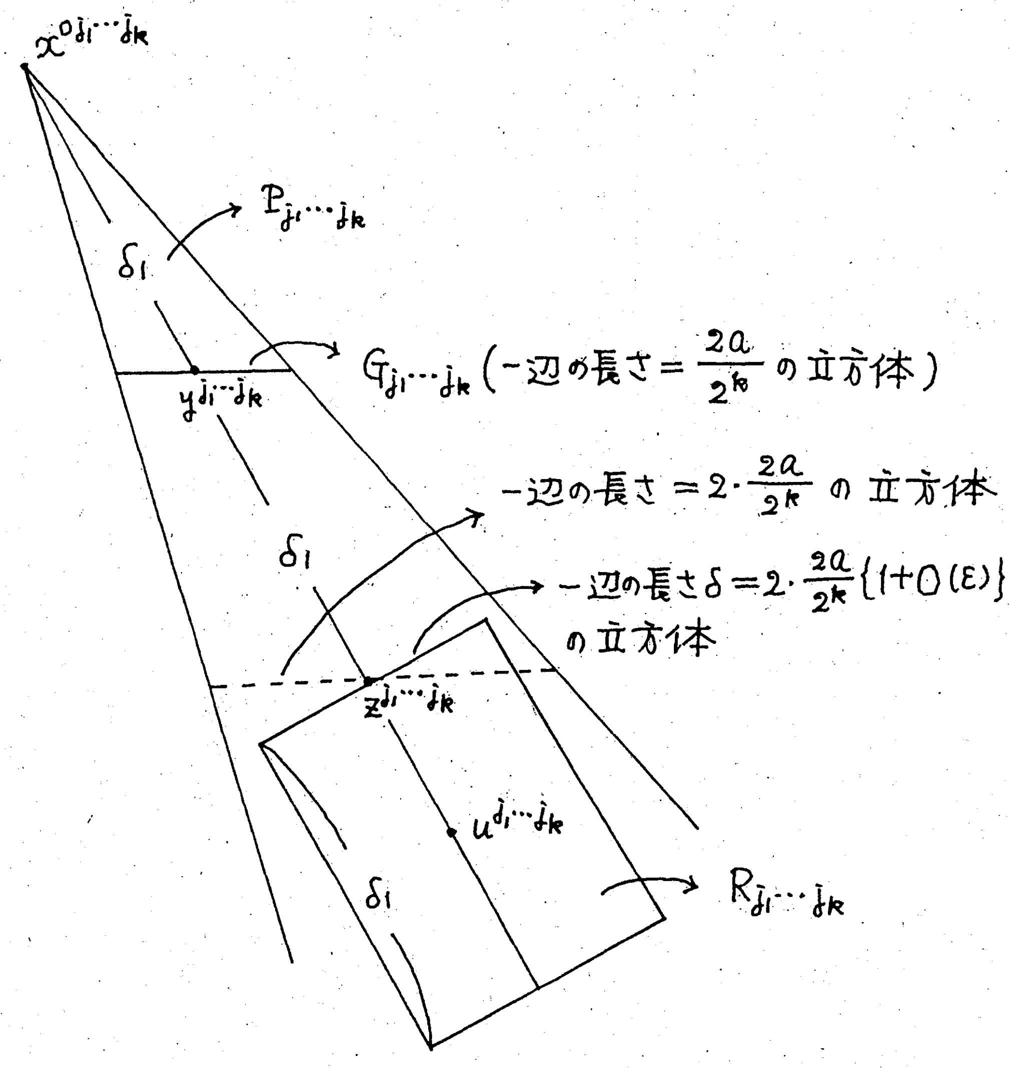

図2

そうすると(6)により

$$\delta=2\cdot\frac{2a}{2^k}\{1+O(\varepsilon)\}\simeq 4R^{-\left(\frac{n-1}{n}+\varepsilon\right)},$$

$$\delta_1 = h_k\{1+O(\varepsilon^2)\} \simeq \varepsilon^{n-1} R^{-\frac{n-1}{n}} (\log_2 R)^n$$

である。故に R を十分大にとれば δ, δ_1 は共に十分小さくなる。再び(6)により

(8) $|\mathrm{R}_{j_1\cdots j_k}| = \delta^{n-1}\delta_1 \doteqdot 4^{n-1}\, k^n\, a^{n-1}\, h_0\, 2^{-k(n-1)}$,

(9) $\sum_{j_1\cdots j_k} |\mathrm{R}_{j_1\cdots j_k}| \simeq 4^{n-1}\, k^n\, a^{n-1}\, h_0$

が成り立つ。従って(5)と(9)より

(10) $|\mathrm{B}_k| = O(k^{-(n-1)} \sum_{j_1\cdots j_k} |\mathrm{R}_{j_1\cdots j_k}|) = O((\log R)^{-(n-1)} \sum_{j_1\cdots j_k} |\mathrm{R}_{j_1\cdots j_k}|)$

が得られる。また(8)によって

(11) $|\mathrm{R}_{j_1\cdots j_k}| \simeq n\, 2^{n-1}\, |\mathrm{P}_{j_1\cdots j_k}|$

が得られる。

§4. 関数の族 $\{f_j\}$ の構成

§3で構成された矩形 $\mathrm{R}_{j_1\cdots j_k}$ の中心を $u^{j_1\cdots j_k}$ とおく。各矩形 $\mathrm{R}_{j_1\cdots j_k}$ に対して新しい直交座標系 $\{t_1, \cdots, t_{n-1}, t_n\}$ を，原点が $u^{j_1\cdots j_k}$, t_n−軸はベクトル $v^{j_1\cdots j_k}$ の方向，残りの $t_1, \cdots, t_{n-1}$ 軸は

$$\mathrm{R}_{j_1\cdots j_k} = \left\{ t=(t_1, \cdots, t_{n-1}, t_n) : \begin{array}{l} |t_l| \leqq \frac{\delta}{2} \ (l=1, \cdots, n-1) \\ |t_n| \leqq \frac{\delta_1}{2} \end{array} \right\}$$

となる様に定める。そうすると前の x−座標系から新しい t−座標系への座標変換を U とすると，U は直交行列で，$x=u^{j_1\cdots j_k}+Ut$ である。

次の様な関数 $\Phi\in C^\infty(-\infty, \infty)$ をとる：

$0 \leqq \Phi(s) \leqq 1$ for $s\in(-\infty, \infty)$,

$\Phi(s)=1$ for $|s| \leqq 1-\varepsilon_0$ ($\varepsilon_0>0$ は十分小),

$\Phi(s)=0$ for $|s| \geqq 1$.

これを用いて

$$g_0(t) = \Phi\left(\frac{2}{\delta}t_1\right)\cdots\Phi\left(\frac{2}{\delta}t_{n-1}\right)\cdot I(t_n) \quad (I(t_n)=1),$$

$$g(t) = \Phi\left(\frac{2}{\delta}t_1\right)\cdots\Phi\left(\frac{2}{\delta}t_{n-1}\right)\cdot\Phi\left(\frac{2}{\delta_1}t_n\right),$$

$$g_{0j_1\cdots j_k}(x) = g_0(U^{-1}(x-u^{j_1\cdots j_k}))$$

$$g_{j_1\cdots j_k}(x) = g(U^{-1}(x-u^{j_1\cdots j_k}))$$

とおく。そうすると $\varepsilon_0>0$ を小さくとれば，

(12) $g_{0j_1\cdots j_k}(x)=1$ for $x\in\mathrm{P}_{j_1\cdots j_k}$

となる。更に $R>0$ を与えたとき，点 $w^{j_1\cdots j_k}$ を，球面 $\{w\in \boldsymbol{R}^n : |w|=R\}$ 上の点で，原点から $w^{j_1\cdots j_k}$ への方向がベクトル $v^{j_1\cdots j_k}$ の方向と等しい様にとり，

$$f_{j_1\cdots j_k}(x) = \exp(i(w^{j_1\cdots j_k}, x))\, g_{j_1\cdots j_k}(x)$$

とおく。そうすると $\mathrm{supp}\, f_{j_1\cdots j_k} \subset \mathrm{R}_{j_1\cdots j_k}$ で，これらは互いに素である。この関数族 $\{f_{j_1\cdots j_k}\}$ が我々の必要とするものである。R を十分大きくとると，δ, δ_1 は小さくなるから，

supp $f_{j_1\cdots j_k}\subset \mathrm{R}_{j_1\cdots j_k}\subset T^n$ となることに注意する。

§5. 定理の証明

記号を簡単にして $j=j_1\cdots j_k$ と書きそして $\mathrm{B}=\mathrm{B}_k$ と書く。そうすると今までの議論によって，関数族 $\{f_j\}$ は

$$\|\{\sum_j|f_j|^2\}^{\frac{1}{2}}\|_p\leqq\{\sum_j|\mathrm{R}_j|\}^{\frac{1}{p}},$$

そして(10)によって集合 $\mathrm{B}\subset T^n$ は

$$|\mathrm{B}|=O((\log R)^{-(n-1)}\sum_j|\mathrm{R}_j|)$$

をみたす。従ってもし不等式

$$\int_{\mathrm{B}}|S_R(f_j:x)|^2dx\geqq C|\mathrm{R}_j| \tag{13}$$

が示されれば証明が終る。

$$D_R(x)=\sum_{|m|<R}e^{i(m,x)},$$

$$H_R(x)=\int_{|y|<R}e^{i(x,y)}dy$$

とおくと，

$$S_R(f_j:x)=\sum_{|m|<R}(f_j)^{\wedge}_m e^{i(m,x)}$$

に対しては

$$S_R(f_j:x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}f_j(u)D_R(x-u)du$$

と書け，そして

$$\sigma_R(f_j:x)=\int_{|y|<R}\hat{f}_j(y)e^{i(x,y)}dy$$

とおくと，これは supp $f_j\subset T^n$ より

$$\sigma_R(f_j:x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}f_j(u)H_R(x-u)du$$

と書ける。

$\mathrm{P}_j\subset\mathrm{B}$ であることより

$$\left\{\int_B|S_R(f_j:x)|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}\geqq\left\{\int_{\mathrm{P}_j}|S_R(f_j:x)|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

$$\geqq\left\{\int_{\mathrm{P}_j}|\sigma_R(f_j:x)|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}-\left\{\int_{\mathrm{P}_j}|S_R(f_j:x)-\sigma_R(f_j:x)|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

である。

最初次が成り立つことを示す：

$$S_R(f_j:x)-\sigma_R(f_j:x)=O(R^{\frac{n-1}{2}}|\mathrm{R}_j|^{\frac{1}{2}})\quad\text{for } x\in\mathrm{P}_j.$$

R を十分大きくとると，$x\in\mathrm{P}_j$ 及び $u\in$ supp f_j に対して $x-u\in[-\pi,\ \pi)^n$ であるから，論文［3］の Lemma 4 の証明の中で示した評価式

$$\| D_R - H_R \|_{L^2(T^n)} = O(R^{\frac{n-1}{2}})$$

を用いて

$$|S_R(f_j : x) - \sigma_R(f_j : x)| = \left| \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} f_j(u) \left\{ D_R(x-u) - H_R(x-u) \right\} du \right|$$

$$\leqq \frac{1}{(2\pi)^n} \| f_j \|_2 \| D_R - H_R \|_2 = O(R^{\frac{n-1}{2}} |\mathrm{R}_j|^{\frac{1}{2}})$$

が得られる。

故に(11)を用いることにより

(15) $$\left\{ \int_{\mathrm{P}_j} |S_R(f_j : x) - \sigma_R(f_j : x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leqq CR^{\frac{n-1}{2}} |\mathrm{R}_j|^{\frac{1}{2}} |\mathrm{P}_j|^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqq C_1 R^{\frac{n-1}{2}} |\mathrm{R}_j|$$

が得られる。

次に次が成り立つことを示す：

$$|\sigma_R(f_j : x)| \geqq C > 0 \quad \text{for } x \in \mathrm{P}_j.$$

$f_j(x) = e^{i(w^j, x)} g(U^{-1}(x-u^j))$ であるから，変数変換により，$\xi = U^{-1}(x-u^j)$ として

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \sigma_R(f_j : x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{|y|<R} e^{-i(y-w^j, u^j)} \hat{g}(U^{-1}(y-w^j)) e^{i(x, y)} dy$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{|y+w^j|<R} e^{-i(y, u^j)} \hat{g}(U^{-1}y) \; e^{i(x, y+w^j)} dy$$

$$= e^{i(x, w^j)} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{|Uy+w^j|<R} \hat{g}(y) e^{i(\xi, y)} dy$$

と書ける。そして更に

$$= e^{i(x, w^j)} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{y_n<0} \hat{g}(y) e^{i(\xi, y)} dy + o(1),$$

ここに $o(1)$ は $R \to \infty$ のとき x について一様であることが証明出来る。それ故最後の式は

$$= e^{i(x, w^j)} \cdot \prod_{l=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\Phi\left(\frac{2}{\delta}\cdot\right) \right]^{\wedge}(y_l) e^{i\xi_l y_l} dy_l \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} \left[\Phi\left(\frac{2}{\delta_1}\cdot\right) \right]^{\wedge}(y_n) e^{i\xi_n y_n} dy_n + o(1)$$

$$= e^{i(x, w^j)} \cdot \prod_{l=1}^{n-1} \Phi\left(\frac{2}{\delta}\xi_l\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} \left[\Phi\left(\frac{2}{\delta_1}\cdot\right) \right]^{\wedge}(y_n) e^{i\xi_n y_n} dy_n + o(1)$$

$$= e^{i(x, w^j)} g_{0j}(x) \cdot \frac{1}{2\pi i} \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{2}{\delta_1} t_n\right) \frac{1 - e^{-iN(\xi_n - t_n)}}{\xi_n - t_n} dt_n + o(1)$$

$$=e^{i(x,w^j)}g_{0j}(x)\cdot\frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\int_{-\frac{\delta_1}{2}}^{\frac{\delta_1}{2}}\Phi\left(\frac{2}{\delta_1}t_n\right)\frac{1-e^{-iN(\xi_n-t_n)}}{\xi_n-t_n}dt_n+o(1)$$

と書けるが，ここで $x\in P_j$ に対して $\frac{3}{2}\delta_1\leqq\xi_n\leqq\frac{5}{2}\delta_1$ なること及び $-\frac{\delta_1}{2}\leqq t_n\leqq\frac{\delta_1}{2}$ に対して $\delta_1\leqq\xi_n-t_n\leqq 3\delta_1$ なることに注意し，Riemann-Lebesgue の定理を用いると最後の式は

$$=e^{i(x,w^j)}g_{0j}(x)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{\delta_1}{2}}^{\frac{\delta_1}{2}}\frac{\Phi\left(\frac{2}{\delta_1}t_n\right)}{\xi_n-t_n}dt_n+o(1)$$

となる。従って $x\in P_j$ に対して(12)より

$$|\sigma_R(f_j:x)|=(\sqrt{2\pi})^{n-2}\int_{-\frac{\delta_1}{2}}^{\frac{\delta_1}{2}}\frac{\Phi\left(\frac{2}{\delta_1}t_n\right)}{\xi_n-t_n}dt_n+o(1)$$

$$\geqq(\sqrt{2\pi})^{n-2}\frac{1}{3\delta_1}\int_{-\frac{\delta_1}{2}}^{\frac{\delta_1}{2}}\Phi\left(\frac{2}{\delta_1}t_n\right)dt_n+o(1)=(\sqrt{2\pi})^{n-2}\frac{1}{6}\int_{-1}^{1}\Phi(s)\,ds+o(1)$$

である。故にある定数 $C>0$ が存在して $|\sigma_R(f_j:x)|\geqq C$ が得られる。

故に再び(11)を用いて

(16) $$\left\{\int_{P_j}|\sigma_R(f_j:x)|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}\geqq C|P_j|^{\frac{1}{2}}\geqq C_2|R_j|^{\frac{1}{2}}$$

が得られる。

(14)に(15)(16)の評価を代入すると，C_1，C_2 をある正の定数として

$$\left\{\int_B|S_R(f_j:x)|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}\geqq C_2|R_j|^{\frac{1}{2}}-C_1R^{\frac{n-1}{2}}|R_j|$$

$$=C_2|R_j|^{\frac{1}{2}}\left\{1-\frac{C_1}{C_2}R^{\frac{n-1}{2}}|R_j|^{\frac{1}{2}}\right\}$$

が得られるが，δ と δ_1 の評価より

$$R^{n-1}|R_j|=R^{n-1}\delta^{n-1}\delta_1=R^{n-1}\cdot 4^{n-1}R^{-\left(\frac{n-1}{n}+\varepsilon\right)(n-1)}\cdot\varepsilon^{n-1}R^{-\frac{n-1}{n}}(\log_2 R)^n$$

$$=(4\varepsilon)^{n-1}R^{-(n-1)\varepsilon}(\log_2 R)^n\longrightarrow 0\ (R\to\infty)$$

であるから，C_3 をある正の定数として

$$\left\{\int_B|S_R(f_j:x)|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}\geqq C_3|R_j|^{\frac{1}{2}}$$

即ち(13)が得られ，証明が完了する。

付記。論文［4］の Summary の中での $(\alpha,\ p)$ の領域は $\left\{(\alpha,\ p):0\leqq\alpha\leqq n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2},\ 1\leqq p\leqq\frac{2n}{n+1}\right\}$ の誤植である。

引用文献

[1] K. I. BABENKO, On summability and convergence of eigenfunction expansions of a differential operator, Math. USSR Sbornik, 20 (1973), 157-211.

[2] C. FEFFERMAN, The multiplier problem for the ball, Ann. Math., 94 (1971), 330-336.

[3] M. KOJIMA, On the almost everywhere divergence of Bochner-Riesz means of multiple Fourier series and integrals, (to appear in Math. Japonica, 37 (1992)).

[4] 小嶋迪孝, 多変数フーリエ級数の Bochner-Riesz means の operator norm に関する評価, 北陸大学紀要, 14 (1990), 281-288.