北陸大学 紀要
第11号 (1987)
pp. 121〜130

多変数フーリエ級数のボホナー・リース平均の局所性定理

小 嶋 迪 孝*

Localization theorem of Bochner-Riesz means of multiple Fourier series

Michitaka Kojima

Received October 19, 1987

Summary

In this note we show that Bochner-Riesz means of order δ with $0 \leqq \delta < (n-1)/2$ for n-dimensional Fourier series of continuous functions can not have the localization property.

R^n を n 次元ユークリッド空間とし，その元 $x=(x_1, \cdots, x_n)$，$y=(y_1, \cdots, y_n)$ に対して $(x, y)=\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$，$|x|=(x, x)^{\frac{1}{2}}$ とする。Z^n を R^n の格子点全体の集合，$T^n \cong R^n/2\pi Z^n$ を n 次元トーラスとする。$L^p(T^n)$ $(1 \leqq p < \infty)$ を T^n 上の p 乗可積分関数全体の集合，$C(T^n)$ を T^n 上の連続関数全体の集合とする。

$\delta \geqq 0$ に対して $f \in L^1(T^n)$ のフーリエ級数の δ 次のボホナー・リース平均を

$$S_R^\delta(f:x)=\sum_{|m|<R}\left(1-\frac{|m|^2}{R^2}\right)^\delta \hat{f}_m\, e^{i(m,x)}$$

とあらわす。ここに

$$\hat{f}_m=(2\pi)^{-n}\int_{T^n} f(t)\, e^{-i(m,t)}\,dt \quad (m \in Z^n).$$

Xを $L^1(T^n)$ の部分集合とするとき，$S_R^\delta(f)$ がXに対して局所性原理を持つとは，任意に $x_0 \in T^n$ をとり，もし $f \in X$が $|x-x_0|<\eta$ なる x に対して $f(x)=0$ をみたすならば，$\lim_{R\to\infty} S_R^\delta(f:x_0)=0$ が成り立つことと定義する。ここに η はある正数。

$\delta > \frac{n-1}{2}$ の時 $S_R^\delta(f)$ は $L^1(T^n)$ に対して局所性原理を持つことは容易に証明出来る。$\delta=\frac{n-1}{2}$ の時 $L^1(T^n)$ に対しては持たないが，$L^p(T^n)$ $(p>1)$ に対しては持

*教 養 部
Faculty of General Education

つことが各々 S. Bochner［1］, E. M. Stein［3］［4］によって証明されている。$0 \leqq \delta < \frac{n-1}{2}$ の時 $S_R^\delta(f)$ が局所性原理を持つかどうかについてはあまりよくは知られていない。本稿の目的はこの場合 $C(T^n)$ に対して局所性原理を持たないことを厳密に証明することであり，その方法はラプラス演算子の固有関数展開の立場での V. A. Ilin and Sh. A. Alimov の論文［2］を参考にしてフーリエ級数の立場に立って辿ってみて出来たものである。§1はその準備にあて，§2でそれを利用して目的の結果の証明を与える。尚，これは山岸昭善氏（長野県高校教員）との共同研究によるものである。

§1. 補助定理

$0 \leqq \delta < \frac{n-1}{2}$ とし，$\varepsilon = \frac{n-1}{2} - \delta \ (>0)$ とおく。

補助定理 次をみたす定数A＞0が存在する：十分小さいすべての $\rho>0$ に対してある $\lambda_0 = \lambda_0(\rho)$ が存在して，すべての $\lambda \geqq \lambda_0$ に対し，$E = E_\rho = \left\{ y \in R^n : \frac{\rho}{2} \leqq |y| \leqq \rho \right\}$ として

$$(1)\quad \int_E \Big| \sum_{0 \leqq k < \lambda} \ \sum_{|m|^2 = k} \left(1 - \frac{k}{\lambda}\right)^\delta e^{i(m,y)} \Big| \, dy \geqq A \rho^\varepsilon \sqrt{\lambda}^{\,\varepsilon}$$

が成り立つ。

証　明 証明の都合上 ρ を ρ^4 として示す。

$k=0$ の時 $\displaystyle\sum_{|m|^2=k} \left(1 - \frac{k}{\lambda}\right)^\delta e^{i(m,y)} = 1$ であるから，(1)の代わりに

$$(2)\quad \int_E \Big| \sum_{1 \leqq k < \lambda} \ \sum_{|m|^2 = k} \left(1 - \frac{k}{\lambda}\right)^\delta e^{i(m,y)} \Big| \, dy \geqq B \rho^{4\varepsilon} \sqrt{\lambda}^{\,\varepsilon}$$

を示せば十分である。ここに B は λ，ρ には無関係な正の定数である。

$\rho \leqq 1$ とし，次の radial 関数を考える：

$$v_\lambda(|y|) = \begin{cases} (2\pi)^n K_\lambda^\delta(y) & (|y| < \rho) \\ 0 & (|y| \geqq \rho) \end{cases}$$

ここに

$$K_\lambda^\delta(y) = (2\pi)^{-n} \int_{|x| < \sqrt{\lambda}} \left(1 - \frac{|x|^2}{\lambda}\right)^\delta e^{i(x,y)} \, dx = (2\pi)^{-n} 2^\delta \Gamma(\delta+1) \sqrt{\lambda}^{\,n} V_{\frac{n}{2}+\delta}(\sqrt{\lambda}|y|)$$

であり，$V\mu(t) = J\mu(t) t^{-\mu}$ で，$J\mu(t)$ は μ 次の Bessel 関数をあらわす。そうすると $|m|^2 = k$ なる $m \in Z^n$ に対して

$$\hat{(v_\lambda)}_m = (2\pi)^{-n} \int_{|y| < \rho} v_\lambda(|y|) e^{-i(m,y)} dy = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_0^\rho v_\lambda(r) V_{\frac{n}{2}-1}(|m| r) r^{n-1} dr$$

$$= 2^\delta \Gamma(\delta+1) \sqrt{\lambda}^{\,\frac{n}{2}-\delta} \sqrt{k}^{\,-(\frac{n}{2}-1)} \int_0^\rho J_{\frac{n}{2}+\delta}(\sqrt{\lambda} r) J_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{k} r) r^{-\delta} dr.$$

ここで Bessel 関数についての公式（［5］, p. 192, 193）を用いると，$\delta > 0$ に対しては

$$2^{\delta}\Gamma(\delta+1)\sqrt{\lambda}^{\frac{n}{2}-\delta}\sqrt{k}^{-(\frac{n}{2}-1)}\int_0^\infty J_{\frac{n}{2}+\delta}(\sqrt{\lambda}\,r)J_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{k}\,r)r^{-\delta}dr$$
$$=\begin{cases}(1-\frac{k}{\lambda})^{\delta} & (k<\lambda)\\ 0 & (k\geqq\lambda)\end{cases}\equiv(1-\frac{k}{\lambda})_+^{\delta},$$

そして$\delta=0$に対しては

$$\sqrt{\lambda}^{\frac{n}{2}}\sqrt{k}^{-(\frac{n}{2}-1)}\int_0^{\to\infty}J_{\frac{n}{2}}(\sqrt{\lambda}\,r)J_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{k}\,r)dr=\begin{cases}1 & (k<\lambda)\\ \frac{1}{2} & (k=\lambda)\\ 0 & (k>\lambda)\end{cases}\equiv\delta_k^{\lambda}$$

であるから，$(v_\lambda)\hat{}_m$ は $\int_0^\rho=\int_0^\infty-\int_\rho^\infty$とすることによって次の様になる：$|m|^2=k$ として，$\delta>0$の時は

(3) $(v_\lambda)\hat{}_m=(1-\frac{k}{\lambda})_+^{\delta}-2^{\delta}\Gamma(\delta+1)\sqrt{\lambda}^{\varepsilon}\sqrt{k}^{-\frac{1}{2}(n-1)}I_k^{\lambda}(\rho)$

ここに

$$I_k^{\lambda}(\rho)=\sqrt{\lambda}^{\frac{1}{2}}\sqrt{k}^{\frac{1}{2}}\int_\rho^\infty J_{\frac{n}{2}+\delta}(\sqrt{\lambda}\,r)J_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{k}\,r)r^{-\delta}dr.$$

そして$\delta=0$の時は

(3)′ $(v_\lambda)\hat{}_m=\delta_k^{\lambda}-\sqrt{\lambda}^{\varepsilon}\sqrt{k}^{-\frac{1}{2}(n-1)}I_k^{\lambda}(\rho)$

ここに

$$I_k^{\lambda}(\rho)=\sqrt{\lambda}^{\frac{1}{2}}\sqrt{k}^{\frac{1}{2}}\int_\rho^{\to\infty}J_{\frac{n}{2}}(\sqrt{\lambda}\,r)J_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{k}\,r)dr.$$

さて$\lambda>1$に対してΛを$\Lambda>\lambda$なる様にとる。

最初$\delta>0$とする。(3)の両辺に$e^{i(m,y)}$を乗じて $|m|^2=k$ なる $m\in Z^n$ について加え，次にそれを$1\leqq k<\Lambda$なるkについて加え，そしてその絶対値をとりE上で積分すると次の不等式が得られる：

(4) $$\int_E\Big|\sum_{1\leqq k<\lambda}\sum_{|m|^2=k}(1-\frac{k}{\lambda})^{\delta}e^{i(m,y)}\Big|dy\geqq\int_E\Big|\sum_{1\leqq k<\Lambda}\sum_{|m|^2=k}(v_\lambda)\hat{}_m e^{i(m,y)}\Big|dy$$
$$-2^{\delta}\Gamma(\delta+1)\sqrt{\lambda}^{\varepsilon}\int_E\Big|\sum_{1\leqq k<\Lambda}\sum_{|m|^2=k}\sqrt{k}^{-\frac{1}{2}(n-1)}I_k^{\lambda}(\rho)e^{i(m,y)}\Big|dy.$$

これは(2)の左辺を評価するための主要な道具となっている。

$$\lim_{\Lambda\to\infty}\int_E\Big|(v_\lambda)\hat{}_0+\sum_{1\leqq k<\Lambda}\sum_{|m|^2=k}(v_\lambda)\hat{}_m e^{i(m,y)}\Big|dy=\int_E\big|v_\lambda(|y|)\big|dy$$

が成立すること，及び $|(v_\lambda)\hat{}_0|\leqq C\rho^{\varepsilon}\sqrt{\lambda}^{\varepsilon}$, $|E|\leqq\Omega_n\rho^{4n}$ に注意すると

(5) $$\lim_{\Lambda\to\infty}\int_E\Big|\sum_{1\leqq k<\Lambda}\sum_{|m|^2=k}(v_\lambda)\hat{}_m e^{i(m,y)}\Big|dy\geqq\int_E\big|v_\lambda(|y|)\big|dy-C\rho^{\frac{5}{2}n+\frac{3}{2}+3\delta}\rho^{4\varepsilon}\sqrt{\lambda}^{\varepsilon}$$

が得られる。従って結論を示すためには十分小さいすべての$\rho>0$に対してある$\lambda_0(\rho)$が存

在して，すべての $\lambda = \lambda_0(\rho)$ に対し

(6) $\displaystyle\int_E |v_\lambda(|y|)|\,dy \geqq 4B\rho^{4\varepsilon}\sqrt{\lambda}^{\varepsilon}$

(7) $\displaystyle 2^\delta\Gamma(\delta+1)\int_E \Big|\sum_{1\leqq k<\Lambda}\sum_{|m|^2=k}\sqrt{k}^{-\frac{1}{2}(n-1)} I_k^\lambda(\rho)e^{i(m,y)}\Big|\,dy \leqq B\rho^{4\varepsilon}$

を示せばよい。ここにBは λ, Λ, ρ には無関係な定数である。

$\delta=0$ の場合も同様である。(3)′より同様に議論して

$$(4)'\ \int_E \Big|\sum_{1\leqq k<\lambda}\sum_{|m|^2=k} e^{i(m,y)}\Big|\,dy \geqq \int_E \Big|\sum_{1\leqq k<\Lambda}\sum_{|m|^2=k}(v_\lambda)^{\wedge}_m e^{i(m,y)}\Big|\,dy$$

$$-\sqrt{\lambda}^{\varepsilon}\int_E \Big|\sum_{1\leqq k<\Lambda}\sum_{|m|^2=k}\sqrt{k}^{-\frac{1}{2}(n-1)} I_k^\lambda(\rho)e^{i(m,y)}\Big|\,dy - \frac{1}{2}\int_E \Big|\sum_{|m|^2=\lambda} e^{i(m,y)}\Big|\,dy$$

が得られる。Parseval の等式，$\#\{m\in Z^n : |m|^2=\lambda\} = O(\sqrt{\lambda}^{\frac{1}{2}(n-1)})$ 及び $|E|\leqq \Omega_n\rho^{4n}$ なる事実を用いると

$$\int_E \Big|\sum_{|m|^2=\lambda} e^{i(m,y)}\Big|\,dy \leqq C\rho^{2+4\varepsilon}\sqrt{\lambda}^{\varepsilon}$$

が分かり，更に(5)も成り立つから，この場合もまた(6)(7)を示せばよい。但しこの場合 $I_k^\lambda(\rho)$ をあらわす積分は(3)′に従って improper の意味にとる。

不等式(6)を証明する。

$$\int_E |v_\lambda(|y|)|\,dy = (2\pi)^{\frac{n}{2}}2^\delta\Gamma(\delta+1)\omega_n\sqrt{\lambda}^n\int_{\frac{1}{2}\rho^4}^{\rho^4}(\sqrt{\lambda}r)^{-(\frac{n}{2}+\delta)}\big|J_{\frac{n}{2}+\delta}(\sqrt{\lambda}r)\big|r^{-(n-1)}dr$$

において，Bessel 関数の漸近公式

$$J_{\frac{n}{2}+\delta}(\sqrt{\lambda}r)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sqrt{\lambda}r)^{-\frac{1}{2}}\cos(\sqrt{\lambda}r-\theta)+O((\sqrt{\lambda}r)^{-\frac{3}{2}})$$

ここに $\theta=\dfrac{\pi}{2}(\dfrac{n}{2}+\delta)+\dfrac{\pi}{4}$，及び不等式

$$|\cos(\sqrt{\lambda}r-\theta)|\geqq\cos^2(\sqrt{\lambda}r-\theta)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\sqrt{\lambda}r-2\theta)$$

を用いると

$$\int_E |v_\lambda(|y|)|\,dy$$

$$\geqq(2\pi)^{\frac{n}{2}}2^\delta\Gamma(\delta+1)\omega_n(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\lambda}^{\varepsilon}\Big(\int_{\frac{1}{2}\rho^4}^{\rho^4}r^{\varepsilon-1}dy+\int_{\frac{1}{2}\rho^4}^{\rho^4}r^{\varepsilon-1}\cos(2\sqrt{\lambda}r-2\theta)\,dr\Big)$$

$$-O\Big(\sqrt{\lambda}^{\varepsilon-1}\int_{\frac{1}{2}\rho^4}^{\rho^4}r^{\varepsilon-2}\,dr\Big)$$

が得られ，最後の二番目の積分には部分積分を適用することにより

$$=(2\pi)^{\frac{n}{2}}2^\delta\Gamma(\delta+1)\omega_n(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\varepsilon}\Big(1-\frac{1}{2^\varepsilon}\Big)\rho^{4\varepsilon}\sqrt{\lambda}^{\varepsilon}-O\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{1}{\rho^4}\,\rho^{4\varepsilon}\sqrt{\lambda}^{\varepsilon}\Big)$$

が得られる。従ってBを

(8) $4B=(2\pi)^{\frac{n}{2}}2^{\delta}\Gamma(\delta+1)\omega_n\cdot(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\epsilon}(1-\frac{1}{2^{\epsilon}})\cdot\frac{1}{2}$

と定めれば，各ρ（$0<\rho<1$）に対してある$\lambda_0(\rho)$が存在して，すべての$\lambda\geqq\lambda_0(\rho)$に対し(6)が成り立つことが分る。

(7)を証明するために，先ず$I_k^\lambda(\rho)$に対して次の評価が成り立つことを示す。

(i) すべてのλ，kに対して

$$|I_k^\lambda(\rho)|\leqq\begin{cases}C\rho^{-\delta} & (\delta>0)\\ C\log\frac{1}{\rho} & (\delta=0)\end{cases}$$

(ii) $\lambda\neq k$に対して

$$|I_k^\lambda(\rho)|\leqq C|\sqrt{k}-\sqrt{\lambda}|^{-1}\rho^{-\delta-1}\quad(\delta\geqq 0)$$

ここにCはk，λ，ρには無関係な定数である。

(i) を示す。$\delta>0$の場合は評価 $J_\nu(t)=O(t^{-\frac{1}{2}})$より直ちに得られる。$\delta=0$の場合は

$$I_k^\lambda(\rho)=\sqrt{\lambda}^{\frac{1}{2}}\sqrt{k}^{\frac{1}{2}}\left(\int_\rho^1+\int_1^{+\infty}\right)J_{\frac{n}{2}}(\sqrt{\lambda}\,r)J_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{k}\,r)\,dr=I_1+I_2$$

と分ける。I_1については同じ$J_\nu(t)$の評価を用いて

$$|I_1|\leqq C\log\frac{1}{\rho}$$

が得られる。I_2については漸近公式 $J_\nu(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}t^{-\frac{1}{2}}\cos(t-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4})+O(t^{-\frac{3}{2}})$を

用いると，$\varphi=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{n}{2}+\frac{\pi}{4}$，$\psi=\frac{\pi}{2}(\frac{n}{2}-1)+\frac{\pi}{4}$ として

$$\begin{aligned}|I_2|&=\frac{1}{\pi}\left|\int_1^{+\infty}r^{-2}\left\{\cos((\sqrt{\lambda}+\sqrt{k})r-(\varphi+\psi))+\cos((\sqrt{\lambda}-\sqrt{k})r-(\varphi-\psi))\right\}dr\right|\\&\quad+O(\sqrt{\lambda}^{-1}\int_1^{\infty}r^{-2}dr)+O(\sqrt{k}^{-1}\int_1^{\infty}r^{-2}dr)+O(\sqrt{\lambda}^{-1}\sqrt{k}^{-1}\int_1^{\infty}r^{-3}dr)\\&=\frac{1}{\pi}\left|\int_1^{+\infty}r^{-1}\left\{\cos((\sqrt{\lambda}-\sqrt{k})r-\frac{\pi}{2})\right\}dr\right|+O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}+\sqrt{k}})+O(1)\\&=\frac{1}{\pi}\left|\int_1^{+\infty}r^{-1}\sin(\sqrt{\lambda}-\sqrt{k})r\,dr\right|+O(1)=O(1)\end{aligned}$$

が得られる。以上で（i）が証明された。

（ii）は少し厄介であるが部分積分を2回施すことによって示される。ここで用いる公式は次のものである：

(a) $\{t^{-\nu}J_\nu(at)\}'=at^{\nu}J_{\nu-1}(t)$

(b) $\{t^{\nu}J_\nu(at)\}'=-at^{-\nu}J_{\nu+1}(t)$

(c) $J_{\nu-1}(t)+J_{\nu+1}(t)=2\nu t^{-1}J_\nu(t)$

さて(a)を用いて示される次の等式

$$\sqrt{\lambda}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{k}^{-\frac{1}{2}}I_k^\lambda(\rho)=\int_\rho^{\to\infty}J_{\frac{n}{2}+\delta}(\sqrt{\lambda}\,r)J_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{k}\,r)r^{-\delta}dr$$

$$=\sqrt{k}^{-1}\int_\rho^{\to\infty}J_{\frac{n}{2}+\delta}(\sqrt{\lambda}\,r)\,r^{-(\frac{n}{2}+\delta)}\left\{r^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}}(\sqrt{k}\,r)\right\}'dr$$

において，(a)(b)を用いてこの方向で部分積分を２回行なうと，$\alpha=J_{\frac{n}{2}+\delta}(\sqrt{\lambda}\,\rho)J_{\frac{n}{2}+1}(\sqrt{k}\,\rho)\rho^{-\delta}$，$\beta=J_{\frac{n}{2}+\delta+1}(\sqrt{\lambda}\,\rho)J_{\frac{n}{2}+1}(\sqrt{k}\,\rho)\rho^{-\delta}$ として，右辺は

$$-\sqrt{k}^{-1}\alpha-\sqrt{\lambda}\sqrt{k}^{-2}\beta+\sqrt{\lambda}^{2}\sqrt{k}^{-2}\int_\rho^{\to\infty}J_{\frac{n}{2}+\delta+2}(\sqrt{\lambda}\,r)J_{\frac{n}{2}+1}(\sqrt{k}\,r)r^{-\delta}dr$$

に等しくなる。(c)を用いることにより

$$\int_\rho^{\to\infty}J_{\frac{n}{2}+\delta+2}(\sqrt{\lambda}\,r)J_{\frac{n}{2}+1}(\sqrt{k}\,r)r^{-\delta}dr$$

$$=\int_\rho^{\to\infty}J_{\frac{n}{2}+\delta}(\sqrt{\lambda}\,r)J_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{k}\,r)r^{-\delta}dr$$

$$-n\sqrt{k}^{-1}\int_\rho^{\to\infty}J_{\frac{n}{2}+\delta}(\sqrt{\lambda}\,r)J_{\frac{n}{2}}(\sqrt{k}\,r)r^{-\delta-1}dr$$

$$-(n+2\delta+2)\sqrt{\lambda}^{-1}\int_\rho^{\to\infty}J_{\frac{n}{2}+\delta+1}(\sqrt{\lambda}\,r)J_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{k}\,r)r^{-\delta-1}dr$$

$$+n(n+2\delta+2)\sqrt{\lambda}^{-1}\sqrt{k}^{-1}\int_\rho^{\to\infty}J_{\frac{n}{2}+\delta+1}(\sqrt{\lambda}\,r)J_{\frac{n}{2}}(\sqrt{k}\,r)r^{-\delta-2}dr$$

である。右辺の第１項は $\sqrt{\lambda}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{k}^{-\frac{1}{2}}I_k^\lambda(\rho)$ に等しい。第２項以下の項に，そして α，β にも評価 $J_\nu(t)=O(t^{-\frac{1}{2}})$ を用いると結局

$$I_k^\lambda(\rho)=\sqrt{\lambda}^{2}\sqrt{k}^{-2}I_k^\lambda(\rho)+O(\sqrt{k}^{-1}(1+\sqrt{\lambda}\sqrt{k}^{-1}+\sqrt{\lambda}^{2}\sqrt{k}^{-2})\rho^{-\delta-1})$$

が得られる。故に，もし $\lambda<k$ ならば

$$|I_k^\lambda(\rho)|\leqq C(\sqrt{k}-\sqrt{\lambda})^{-1}\rho^{-\delta-1}$$

が得られる。

$\lambda>k$ の時は今行なった計算で $J_{\frac{n}{2}+\delta}(\sqrt{\lambda}\,r)$ と $J_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{k}\,r)$ の役割を逆にして行なうことによって同様の評価が得られる。以上で (ii) が証明された。

(7)の証明に移る。(7)における k についての和 $\sum_{1\leqq k<\Lambda}$ を次の三つの部分

$$\left\{1\leqq\sqrt{k}<\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\right\}\cup\left\{\frac{3}{2}\sqrt{\lambda}<\sqrt{k}<\sqrt{\Lambda}\right\}$$

$$\left\{1<\left|\sqrt{k}-\sqrt{\lambda}\right|\leqq\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\right\}$$

$$\{\,|\sqrt{k}-\sqrt{\lambda}|\leqq 1\}$$

に分け，各々の和を $\sum^{(1)}$，$\sum^{(2)}$，$\sum^{(3)}$ と書く。従って

$$S_j=2^{\delta}\Gamma(\delta+1)\int_E\Big|\sum_k^{(j)}\sum_{|m|^2=k}\sqrt{k}^{\,-\frac{1}{2}(n-1)}I_k^{\lambda}(\rho)e^{i(m,y)}\Big|dy \qquad (j=1,2,3)$$

とおくとき，十分小さいすべての ρ に対して

$$S_j\leqq\frac{1}{3}B\rho^{4\varepsilon}$$

が成り立つことを示せばよい。ここにBは(8)によって定まった定数である。

Schwarz の不等式と Parseval の等式より

$$S_j\leqq C(\rho^{4n})^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_k^{(j)}\sum_{|m|^2=k}\sqrt{k}^{\,-(n-1)}|I_k^{\lambda}(\rho)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

が得られる。

S_1 については，この領域における k について $|\sqrt{k}-\sqrt{\lambda}|\geqq\frac{1}{3}\sqrt{k}$ が成り立つことに注意して評価（ii）を適用すると，$|I_k^{\lambda}(\rho)|\leqq C\sqrt{k}^{\,-1}\rho^{-\delta-1}$ が得られるから

$$\begin{aligned}S_1&\leqq C(\rho^{4n})^{\frac{1}{2}}\Big(\rho^{-2\delta-2}\sum_k^{(1)}\sum_{|m|^2=k}\sqrt{k}^{\,-(n+1)}\Big)^{\frac{1}{2}}\\&\leqq C(\rho^{4n})^{\frac{1}{2}}\Big(\rho^{-2\delta-2}\sum_{|m|\geqq 1}|m|^{-(n+1)}\Big)^{\frac{1}{2}}=C_1\rho^{2n-\delta-1}\\&=C_1\rho^{1+3\delta}\cdot\rho^{4\varepsilon}\end{aligned}$$

が成り立つ。故にρ_1を $C_1\rho_1{}^{1+3\delta}\leqq\frac{1}{3}B$ なる様に小さくとれば，$0<\rho\leqq\rho_1$ に対して $S_1\leqq\frac{1}{3}B\rho^{4\varepsilon}$ と出来る。

S_3 についても同様にして出来る。$\delta>0$ の時評価（i）より

$$\begin{aligned}S_3&\leqq C(\rho^{4n})^{\frac{1}{2}}\Big(\rho^{-2\delta}\sum_k^{(2)}\sum_{|m|^2=k}\sqrt{k}^{\,-(n-1)}\Big)^{\frac{1}{2}}\\&\leqq C(\rho^{4n})^{\frac{1}{2}}\Big(\rho^{-2\delta}\sqrt{\lambda}^{\,-(n-1)}\sum_{\sqrt{\lambda}-1<|m|<\sqrt{\lambda}+1}1\Big)^{\frac{1}{2}}\\&\leqq C_3(\rho^{4n})^{\frac{1}{2}}(\rho^{-2\delta})^{\frac{1}{2}}=C_3\rho^{2n-\delta}=C_3\rho^{2+3\delta}\cdot\rho^{4\varepsilon}\end{aligned}$$

が得られる。故に ρ_3 を $C_3\rho_3{}^{2+3\delta}\leqq\frac{1}{3}B$ なる様に小さけとれば，$0<\rho\leqq\rho_3$ に対して $S_3\leqq\frac{1}{3}B\rho^{4\varepsilon}$ と出来る。

また $\delta=0$ の時は評価（i）より $|I_k^{\lambda}(\rho)|\leqq C\log\frac{1}{\rho}\leqq C\frac{1}{\rho}$ が得られるから，今の計算を $\delta=1$ として辿れば

$$S_3\leqq C_3\rho^{2n-1}=C_3\rho\cdot\rho^{4\varepsilon}$$

が得られる。故に ρ_3を $C_3\rho_3 \leqq \frac{1}{3}B$ なる様に小さくとれば，$0<\rho\leqq\rho_3$ に対して $S_3\leqq\frac{1}{3}B\rho^{4\varepsilon}$と出来る。

最後に S_2 について示す。この領域の k については $\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\leqq\sqrt{k}\leqq\frac{3}{2}\sqrt{\lambda}$ が成り立つから評価（ii）より

$$S_2\leqq C(\rho^{4n})^{\frac{1}{2}}\left(\rho^{-2\delta-2}\sqrt{\lambda}^{-(n-1)}\sum_k^{(2)}\sum_{|m|^2=k}(\sqrt{k}-\sqrt{\lambda})^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

が得られる。ここで $p=p(\lambda)$を $2^p\geqq\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}$ をみたす最小の整数とすると

$$\sum_k^{(2)}\sum_{|m|^2=k}(\sqrt{k}-\sqrt{\lambda})^{-2}=\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{2^{\nu-1}<|\sqrt{k}-\sqrt{\lambda}|\leqq 2^\nu}\sum_{|m|^2=k}|\sqrt{k}-\sqrt{\lambda}|^{-2}$$
$$=O\Big(\sum_{\nu=1}^{p}2^{-2\nu}\sum_{2^{\nu-1}<||m|-\sqrt{\lambda}|\leqq 2^\nu}1\Big)=O\Big(\sum_{\nu=1}^{p}2^{-2\nu}\sum_{||m|-\sqrt{\lambda}|\leqq 2^\nu}1\Big)$$
$$=O\Big(\sum_{\nu=1}^{p}2^{-2\nu}\sqrt{\lambda}^{n-1}2^\nu\Big)=O(\sqrt{\lambda}^{n-1})$$

であるから

$$S_2\leqq C_2\rho^{2n-\delta-1}=C_2\rho^{1+3\delta}\cdot\rho^{4\varepsilon}$$

が得られる。故に ρ_2を $C_2\rho_2{}^{1+3\delta}\leqq\frac{1}{3}B$ なる様に小さくとれば，$0<\rho\leqq\rho_2$ に対して $S_2\leqq\frac{1}{3}B\rho^{4\varepsilon}$ と出来る。

以上で(7)が証明され，補助定理が証明された。

§2. 定理とその証明

今我々は次を証明出来るに至っている。

定理 $0\leqq\delta<\frac{1}{2}(n-1)$ の時，$S_R^\delta(f)$ は $C(T^n)$に対して局所性原理を持たない。

証明 $Q^n=[-\pi,\pi]^n$ とする。結論を示すためには適当な $\rho>0$ 及び関数 $f\in C(Q^n)$が存在して

$$f(x)=0\quad\text{for }|x|\leqq\frac{1}{3}\rho,$$

$$\varlimsup_{R\to\infty}|S_R^\delta(f:0)|=+\infty$$

が成り立つことを示せばよい。

任意に小さい $\rho>0$ をとり固定する。その ρ に対して関数 $\varphi\in C(Q^n)$ を

$$\varphi(x)=0\qquad\text{for }|x|\leqq\frac{1}{3}\rho$$

$$\varphi(x) = 1 \quad \text{for } \frac{1}{2}\rho \leqq |x| \leqq \rho$$

$$0 \leqq \varphi(x) \leqq 1 \quad \text{for } x \in Q^n$$

なる様に任意にとる。次の様な$C(T^n)$上の線形汎関数の族$\{T_R\}_{R>0}$を考える：$g \in C(T^n)$に対して

$$T_R(g) = S_R^\delta(\varphi g : 0) = (2\pi)^{-n} \int \varphi(y) g(y) \sum_{|m|<R} \left(1 - \frac{|m|^2}{R^2}\right)^\delta e^{i(m,y)} dy.$$

ここで $\varphi g \in C(Q^n)$ 且つ $\varphi(y)g(y) = 0$ for $|y| \leqq \frac{1}{3}\rho$ に注意する。

さて結論否定して，$f(x) = 0$ for $|x| \leqq \frac{1}{3}\rho$ なる任意の関数 $f \in C(Q^n)$ に対して

$$\overline{\lim_{R \to \infty}} \left| S_R^\delta(f : 0) \right| < \infty$$

が成り立つと仮定する。そうすると任意の$g \in C(T^n)$に対して$\overline{\lim\limits_{R\to\infty}} \left| T_R(g) \right| < \infty$が云えることになるから

$$\sup_{R>0} \left| T_R(g) \right| < \infty$$

が成立する。 $T_R(\cdot)$ は各$R>0$に対して$C(T^n)$上の有界線形汎関数であるから Banach-Steinhausの一様有界性定理によって

$$\sup_{R>0} \| T_R \| < \infty$$

が成立する。ところで

$$\begin{aligned}
\| T_R \| &= (2\pi)^{-n} \int_{Q^n} \left| \varphi(y) \sum_{|m|<R} \left(1 - \frac{|m|^2}{R^2}\right)^\delta e^{i(m,y)} \right| dy \\
&\geqq (2\pi)^{-n} \int_{\frac{1}{2}\rho \leqq |y| \leqq \rho} \left| \sum_{|m|<R} \left(1 - \frac{|m|^2}{R^2}\right)^\delta e^{i(m,y)} \right| dy \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\frac{1}{2}\rho \leqq |y| \leqq \rho} \left| \sum_{0 \leqq k < R^2} \sum_{|m|^2 = k} \left(1 - \frac{|m|^2}{R^2}\right)^\delta e^{i(m,y)} \right| dy
\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで§1の補助定理より，十分小さい$\rho>0$に対してある$R_0(\rho)$が存在し，すべての$R \geqq R_0(\rho)$に対して最後の項は

$$\geqq (2\pi)^{-n} A \rho^{\frac{1}{2}(n-1)-\delta} \quad R^{\frac{1}{2}(n-1)-\delta}$$

なる様に下からおさえられる。ここにAは補助定理における定数である。これより

$$\sup_{R>0} \| T_R \| = +\infty$$

となり矛盾が得られ，定理が証明されたことになる。

引用文献

[1] S.BOCHNER, Summation of multiple Fourier series by spherical means, Trans. Amer. Math. Soc.,40 (1936), 175-207.

[2] V.A.ILIN AND Sh.A.ALIMOV, Conditions for the convergence of expansions corresponding to self-adjoint extensions of elliptic operators, Diff. Eq., 7 (1971), 516-543.

[3] E.M.STEIN, Localization and summability of multiple Fourier series, Acta. Math., 100 (1958), 93-147.

[4] E.M.STEIN, On certain exponential sums arising in multiple Fourier series, Ann. Math., 73 (1961), 87-109.

[5] 森口繁一，宇田川銈久，一松信，　数学公式Ⅲ，岩波全書．