北陸大学　紀要
第14号 (1990)
pp. 281～288

多変数フーリエ級数の Bochner-Riesz means の operator norm に関する評価

小 嶋 迪 孝

Estimates for the operator norm of Bochner-Riesz means of multiple Fourier series

Michitaka Kojima

Received October 20, 1990

Summary

In this note we give an estimate from below for the magnitude of the operator norm $\| S_R^\alpha \|^{L^p}$ of Bochner–Riesz means of order α of n–dimensional Fourier series in the region $\left\{(\alpha,\ p):\ 0 \leqq n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2},\ \ 1 \leqq p \leqq \frac{2n}{n+1}\right\}$.

$\boldsymbol{R}^n$ を n ($\geqq 2$) 次元ユークリッド空間とし，その元 $x=(x_1,\ \cdots,\ x_n)$，$y=(y_1,\ \cdots,\ y_n)$ に対して $(x,\ y)=\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$，$|x|=(x,\ x)^{\frac{1}{2}}$ とする。$\boldsymbol{Z}^n$ を $\boldsymbol{R}^n$ の格子点全体の集合，$\boldsymbol{T}^n \cong \boldsymbol{R}^n/2\pi\boldsymbol{Z}^n$ を n 次元トーラスとする。$L^p(\boldsymbol{T}^n)$ ($1 \leqq p < \infty$) を $\boldsymbol{T}^n$ 上の p 乗可積分関数全体の集合，$L^\infty(\boldsymbol{T}^n)$ を $\boldsymbol{T}^n$ 上の本質的有界可測関数全体の集合とし，$\|f\|_p$ をそれらの関数 f のノルムとする。

$\alpha \geqq 0$ に対して $f \in L^1(\boldsymbol{T}^n)$ のフーリエ級数の α 次の Bochner–Riesz mean を

$$S_R^\alpha(f : x) = \sum_{|m|<R}\left(1-\frac{|m|^2}{R^2}\right)^\alpha \hat{f}_m e^{i(m,x)}$$

とあらわす。ここに

$$\hat{f}_m = (2\pi)^{-n}\int_{T^n} f(x)\, e^{-i(m,\,x)}\,dx \quad (m \in Z^n).$$

$\| S_R^\alpha \|^{L^p}$ を $f \in L^p(\boldsymbol{T}^n)$ から $S_R^\alpha(f) \in L^p(\boldsymbol{T}^n)$ への operator norm とする。$\alpha_p=n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}$ とおく。領域 $\left\{(\alpha,\ p):\ 1 \leqq p \leqq \frac{2n}{n+1},\ \ 0 \leqq \alpha \leqq \alpha_p\right\}$ における $(\alpha,\ p)$ に対して，

$$\lim_{R\to\infty} \| S_R^\alpha \|^{L^p} = \infty$$

であることが E. M. Stein and G. Weiss [4] によってよく知られている。本稿では，この

＊教 養 部
Faculty of General Education

$+\infty$に発散する速さについての下からの評価を与える。その方法は，一般的な楕円型偏微分作用素に対する固有関数展開の立場での K. I. Babenko の論文［1］を参考にして三角フーリエ級数の立場に立って辿ってみることであり，そのためには E. M. Stein の論文［3］の助けを大いに借りている。

証明する定理は次のものである。

定理 (i) $1 \leqq p < \dfrac{2n}{n+1}$, $0 \leqq \alpha < \alpha_p$ に対して

$$\| S_R^{\alpha} \|^{L^p} \geqq C R^{\alpha_p - \alpha}.$$

(ii) $1 \leqq p \leqq \dfrac{2n}{n+1}$, $\alpha = \alpha_p$ に対して

$$\| S_R^{\alpha} \|^{L^p} \geqq C (\log R)^{\frac{1}{p}}.$$

ここに(i)(ii)における C は R には無関係なある定数をあらわす。

§1は証明に必要な一連の補題を述べるのに充て，§2でそれらを利用して定理を証明する。

§1．補題

$\varphi \in C^{\infty}(0, \infty)$ を次の様な関数とする：$1 < q_0 < q$ とし

$$0 \leqq \varphi(t) \leqq 1 \quad \text{for} \quad t \in [0, \infty),$$

$$\varphi(t) = 0 \quad \text{for} \quad t \in \left[0, \frac{1}{q}\right] \cup [q, \infty),$$

$$\varphi(t) = 1 \quad \text{for}\, t \in \left[\frac{1}{q_0}, q_0\right].$$

各 $R > 0$ に対して次の $\boldsymbol{T}^n$ 上の関数 $f_R(x)$ を考える。

$$(1) \quad f_R(x) = \sum_{m \in Z^n} \varphi\left(\frac{|m^2|}{R^2}\right) e^{i(m, x)}.$$

補題1．（[2]，*Lemma* 3）．$1 \leqq p \leqq \infty$に対して

$$\| f_R \|_p = O(R^{\frac{n}{p'}})$$

が成り立つ，ここに $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

次に $\alpha \geqq 0$ に対して

$$(2) \quad S_R^{\alpha}(f_R : x) = \sum_{|m| < R} \left(1 - \frac{|m|^2}{R^2}\right)^{\alpha} \varphi\left(\frac{|m|^2}{R^2}\right) e^{i(m, x)} = \Phi_R^{\alpha}(x)$$

$$(3) \quad \Psi_R^{\alpha}(x) = (\sqrt{2\pi})^{-n} \int_{|y| < R} \left(1 - \frac{|y|^2}{R^2}\right)^{\alpha} \varphi\left(\frac{|y|^2}{R^2}\right) e^{i(x, y)} dy$$

とおく。

補題2．（[2]，*Lemma* 2）．(3)の $\Psi_R^{\alpha}(x)$ に対して次の漸近公式が成り立つ：$R|x| \geqq 1$ に

対して

$$\Psi_R^{\alpha}(x) = 2^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,R^n(R|x|)^{-\frac{n+1}{2}-\alpha}\cos(R|x|-\theta) + O(R^n(R|x|)^{-\frac{n+3}{2}-\alpha}),$$

ここに，$\theta = \frac{\pi}{2}\left(\frac{n+1}{2}+\alpha\right)$.

補題 3 （[2]，*Lemma* 4）．$0 \leqq \alpha \leqq \frac{n-1}{2}$ に対して

$$\| \Phi_R^{\alpha} - (\sqrt{2\pi})^n \Psi_R^{\alpha} \|_2 = O(R^{\frac{n-1}{2}-\alpha})$$

が成り立つ。

§2．定理の証明

定理を次の形で証明することにする。十分大なるすべての R に対して次が成り立つ：

(i) $1 \leqq p < \frac{2n}{n+1}$，$0 \leqq \alpha < \alpha_p$ に対して

$$\| S_R^{\alpha} \|^{L^p} \geqq C\left\{\frac{R^{p(\alpha_p-\alpha)}-1}{p(\alpha_p-\alpha)}\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

(ii) $1 \leqq p \leqq \frac{2n}{n+1}$，$\alpha = \alpha_p$ に対して

$$\| S_R^{\alpha} \|^{L^p} \geqq C(\log R)^{\frac{1}{p}}.$$

ここに C は R には無関係な定数をあらわす。

(ii)の評価式の右辺の値は(i)の評価式の右辺の値の $\alpha - \alpha_p \to 0$ とした時の極限値となっている。

さて，

$$\Lambda(t) = \begin{cases} \left\{\dfrac{1-t^{-p(\alpha_p-\alpha)}}{p(\alpha_p-\alpha)}\right\}^{\frac{1}{p}} & \text{if} \quad 1 \leqq p < \dfrac{2n}{n+1},\ 0 \leqq \alpha < \alpha_p, \\ (\log t)^{\frac{1}{p}} & \text{if} \quad 1 \leqq p \leqq \dfrac{2n}{n+1},\ \alpha = \alpha_p, \end{cases}$$

とおく。そうすると我々の目的は十分大なるすべての R に対して

(4) $\| S_R^{\alpha} \|^{L^p} \geqq C R^{\alpha_p-\alpha}\Lambda(R)$

が成り立つことを証明することである。そのために我々は，不等式

$$\| S_R^{\alpha} \|^{L^p} \geqq \frac{\| S_R^{\alpha}(f_R) \|_p}{\| f_R \|_p}$$

及び補題 1 による $\| f_R \|_p$ の上からの評価を利用し，そして $\| S_R^{\alpha}(f_R) \|_p$ を下から評価することを考える。

ここで $\Lambda(t)$ について，任意に $\eta > 0$ を固定したとき，η に依存するある定数 C_η が存在して，十分大きいすべての R に対して

(5) $\Lambda(R\eta) \geqq C_\eta \Lambda(R)$

が成り立つことを注意しておく。

我々は先ず，適当な定数$K>0$が存在して，各$0<\eta\leqq\pi$に対し，十分大なるすべてのRについて

$$\left\{\int_{\frac{K}{R}\leqq|x|\leqq\eta}|\Psi_R^{\alpha}(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\geqq CR^{\frac{n-1}{2}-\alpha}\eta^{\alpha_p-\alpha}\Lambda(R\eta) \tag{6}$$

が成り立つことを証明する。ここにCはRとηには無関係な定数をあらわし，以下定数Cは現われる毎に異ってもよいものとする。

補題2によって

$$\begin{aligned}
&\left\{\int_{\frac{K}{R}\leqq|x|\leqq\eta}|\Psi_R^{\alpha}(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\\
&\geqq C\left\{\int_{\frac{K}{R}\leqq|x|\leqq\eta}|R^n(R|x|)^{-\frac{n+1}{2}-\alpha}\cos(R|x|-\theta)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\\
&\quad-O\left(\left\{\int_{\frac{K}{R}\leqq|x|\leqq\eta}|R^n(R|x|)^{-\frac{n+3}{2}-\alpha}|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\right)\\
&=I_1-I_2
\end{aligned}$$

とおく。先ずI_2について上から評価する。

$$\begin{aligned}
I_2^p&\leqq CR^{\left(\frac{n-3}{2}-\alpha\right)p}\int_{\frac{K}{R}\leqq|x|\leqq\eta}|x|^{\left(-\frac{n+3}{2}-\alpha\right)p}dx\\
&=CR^{\left(\frac{n-1}{2}-\alpha\right)p-p}\int_{\frac{K}{R}}^{\eta}r^{\left(-\frac{n+3}{2}-\alpha\right)p+n-1}dr\\
&=CR^{\left(\frac{n-1}{2}-\alpha\right)p-p}\int_{\frac{K}{R}}^{\eta}r^{p(\alpha_p-\alpha)-p-1}dr\\
&\leqq CR^{\left(\frac{n-1}{2}-\alpha\right)p-p}\left(\frac{K}{R}\right)^{-p}\int_{\frac{K}{R}}^{\eta}r^{p(\alpha_p-\alpha)-1}dr\\
&=C\left(\frac{1}{K}\right)^pR^{\left(\frac{n-1}{2}-\alpha\right)p}\int_{\frac{K}{R}}^{\eta}r^{p(\alpha_p-\alpha)-1}dr.
\end{aligned}$$

故に，$\alpha_p>\alpha$のとき，

$$I_2^p\leqq C\left(\frac{1}{K}\right)^pR^{\left(\frac{n-1}{2}-\alpha\right)p}\left\{\frac{\eta^{p(\alpha_p-\alpha)}-\left(\frac{K}{R}\right)^{p(\alpha_p-\alpha)}}{p(\alpha_p-\alpha)}\right\}$$

$$=C\left(\frac{1}{K}\right)^pR^{\left(\frac{n-1}{2}-\alpha\right)p}\eta^{p(\alpha_p-\alpha)}\left\{\frac{1-\left(\frac{R\eta}{K}\right)^{-p(\alpha_p-\alpha)}}{p(\alpha_p-\alpha)}\right\} \tag{7}$$

が成り立ち，そして$\alpha_p=\alpha$のとき，

$$I_2^p\leqq C\left(\frac{1}{K}\right)^pR^{\left(\frac{n-1}{2}-\alpha\right)p}\left\{\log\eta-\log\frac{K}{R}\right\}$$

$$=C\left(\frac{1}{K}\right)^pR^{\left(\frac{n-1}{2}-\alpha\right)p}\log\frac{R\eta}{K} \tag{8}$$

が成り立つ。

次にI_1について下から評価する。

$$I_1^p = CR^{\left(\frac{n-1}{2}-\alpha\right)p}\int_{\frac{K}{R}\leqq|x|\leqq\eta}\left|\,|x|^{-\frac{n+1}{2}-\alpha}\cos(R|x|-\theta)\right|^p dx$$

$$= CR^{\left(\frac{n-1}{2}-\alpha\right)p}\int_{\frac{K}{R}}^{\eta}|r^{-\frac{n+1}{2}-\alpha}\cos(Rr-\theta)|^p r^{n-1}dr$$

$$= CR^{\left(\frac{n-1}{2}-\alpha\right)p}\int_{\frac{K}{R}}^{\eta}r^{p(\alpha_p-\alpha)-1}|\cos(Rr-\theta)|^p dr$$

$$\geqq CR^{\left(\frac{n-1}{2}-\alpha\right)p}\int_{\frac{K}{R}}^{\eta}r^{p(\alpha_p-\alpha)-1}\cos^2(Rr-\theta)\,dr \quad ((\because)\ p\leqq 2)$$

$$= CR^{\left(\frac{n-1}{2}-\alpha\right)p}\int_{\frac{K}{R}}^{\eta}r^{p(\alpha_p-\alpha)-1}\frac{1}{2}\{1+\cos 2(Rr-\theta)\}\,dr$$

$$= CR^{\left(\frac{n-1}{2}-\alpha\right)p}\left\{\int_{\frac{K}{R}}^{\eta}r^{p(\alpha_p-\alpha)-1}dr+\int_{\frac{K}{R}}^{\eta}r^{p(\alpha_p-\alpha)-1}\cos 2(Rr-\theta)\,dr\right\}.$$

故に，$\alpha_p>\alpha$ のとき，部分積分法を適用して

$$I_1^p \geqq CR^{\left(\frac{n-1}{2}-\alpha\right)p}\left\{\frac{\eta^{p(\alpha_p-\alpha)}-\left(\frac{K}{R}\right)^{p(\alpha_p-\alpha)}}{p(\alpha_p-\alpha)}+\left[r^{p(\alpha_p-\alpha)-1}\frac{\sin 2(Rr-\theta)}{2R}\right]_{\frac{K}{R}}^{\eta}\right.$$

$$\left.-\int_{\frac{K}{R}}^{\eta}\{p(\alpha_p-\alpha)-1\}r^{p(\alpha_p-\alpha)-2}\frac{\sin 2(Rr-\theta)}{2R}dr\right\}$$

$$\geqq CR^{\left(\frac{n-1}{2}-\alpha\right)p}\left\{\frac{\eta^{p(\alpha_p-\alpha)}-\left(\frac{K}{R}\right)^{p(\alpha_p-\alpha)}}{p(\alpha_p-\alpha)}-O\left(\frac{1}{R}\eta^{p(\alpha_p-\alpha)-1}\right)\right.$$

$$\left.-O\left(\frac{1}{R}\left(\frac{K}{R}\right)^{p(\alpha_p-\alpha)-1}\right)\right\}$$

$$= CR^{\left(\frac{n-1}{2}-\alpha\right)p}\eta^{p(\alpha_p-\alpha)}\left\{\frac{1-\left(\frac{R\eta}{K}\right)^{-p(\alpha_p-\alpha)}}{p(\alpha_p-\alpha)}-O\left(\frac{1}{R\eta}\right)\right.$$

$$\left.-O\left(\frac{1}{K}\left(\frac{K}{R\eta}\right)^{p(\alpha_p-\alpha)}\right)\right\}$$

が得られるが，$\frac{K}{R}\leqq\eta$ ならば $\frac{1}{R\eta}\leqq\frac{1}{K}$ であるから

(9) $$I_1^p \geqq CR^{\left(\frac{n-1}{2}-\alpha\right)p}\eta^{p(\alpha_p-\alpha)}\left\{\frac{1-\left(\frac{R\eta}{K}\right)^{-p(\alpha_p-\alpha)}}{p(\alpha_p-\alpha)}-O\left(\frac{1}{K}\right)\right\}$$

が得られる。また $\alpha_p=\alpha$ のとき，

$$I_1^p \geqq CR^{\left(\frac{n-1}{2}-\alpha\right)p}\left\{\int_{\frac{K}{R}}^{\eta}r^{-1}dr+\int_{\frac{K}{R}}^{\eta}r^{-1}\cos 2(Rr-\theta)\,dr\right\}$$

であるが，再び部分積分法を適用し同様に議論すると

$$I_1^p \geqq CR^{\left(\frac{n-1}{2}-\alpha\right)p}\left\{\log\eta-\log\frac{K}{R}+\left[r^{-1}\frac{\sin 2(Rr-\theta)}{2R}\right]_{\frac{K}{R}}^{\eta}\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{K}{R}}^{\eta}r^{-2}\frac{\sin 2(Rr-\theta)}{2R}dr\right\}$$

$$\geqq C R^{\left(\frac{n-1}{2}-\alpha\right)p}\left\{\log\frac{R\eta}{K}-O\left(\frac{1}{R\eta}\right)-O\left(\frac{1}{R}\left(\frac{K}{R}\right)^{-1}\right)\right\}$$

$$\geqq C R^{\left(\frac{n-1}{2}-\alpha\right)p}\left\{\log\frac{R\eta}{K}-O\left(\frac{1}{K}\right)\right\} \tag{10}$$

が得られる。

以上の評価の(7)と(9), そして(8)と(10)を合わせる。以下 C' をある適当な定数をあらわすものとする。先ず $\alpha_p>\alpha$ のとき, (7)と(9)より

$$\left\{\int_{\frac{K}{R}\leqq|x|\leqq\eta}|\Psi_R^{\alpha}(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\geqq I_1-I_2$$

$$\geqq C R^{\frac{n-1}{2}-\alpha}\eta^{\alpha_p-\alpha}\left\{\left(\frac{1-\left(\frac{R\eta}{K}\right)^{-p(\alpha_p-\alpha)}}{p(\alpha_p-\alpha)}\right)^{\frac{1}{p}}-O\left(\left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{C'}{K}\left(\frac{1-\left(\frac{R\eta}{K}\right)^{-p(\alpha_p-\alpha)}}{p(\alpha_p-\alpha)}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

であり, ここで $K\geqq 2C'$ ととれば

$$\geqq C R^{\frac{n-1}{2}-\alpha}\eta^{\alpha_p-\alpha}\left\{\left(\frac{1-\left(\frac{R\eta}{K}\right)^{-p(\alpha_p-\alpha)}}{p(\alpha_p-\alpha)}\right)^{\frac{1}{p}}-O\left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

$$=C R^{\frac{n-1}{2}-\alpha}\eta^{\alpha_p-\alpha}\left\{\left(\frac{1-(R\eta)^{-p(\alpha_p-\alpha)}}{p(\alpha_p-\alpha)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1-\left(\frac{R\eta}{K}\right)^{-p(\alpha_p-\alpha)}}{1-(R\eta)^{-p(\alpha_p-\alpha)}}\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$

$$\left.-O\left(\left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\right\}$$

が得られる。従って $\lim_{t\to+\infty}\frac{1-t^{-p(\alpha_p-\alpha)}}{p(\alpha_p-\alpha)}=\frac{1}{p(\alpha_p-\alpha)}$ 及び $\lim_{t\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{t}{K}\right)^{-p(\alpha_p-\alpha)}}{1-t^{-p(\alpha_p-\alpha)}}=1$ に注意すると, 適当に大きなある $K>0$ をとって固定すれば, 各 $0<\eta\leqq\pi$ に対して十分大なるすべての R について

$$\left\{\int_{\frac{K}{R}\leqq|x|\leqq\eta}|\Psi_R^{\alpha}(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\geqq C R^{\frac{n-1}{2}-\alpha}\eta^{\alpha_p-\alpha}\Lambda(R\eta)$$

と出来る。

また $\alpha_p=\alpha$ のとき, (8)と(10)より

$$\left\{\int_{\frac{K}{R}\leqq|x|\leqq\eta}|\Psi_R^{\alpha}(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\geqq I_1-I_2$$

$$\geqq C R^{\frac{n-1}{2}-\alpha}\left\{\left(\log\frac{R\eta}{K}\right)^{\frac{1}{p}}-O\left(\left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{1}{p}}\right)-\frac{C'}{K}\left(\log\frac{R\eta}{K}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

であり, 再び $K\geqq 2C'$ ととれば

$$\geqq C R^{\frac{n-1}{2}-\alpha}\left\{\left(\log\frac{R\eta}{K}\right)^{\frac{1}{p}}-O\left(\left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\right\}$$

$$= C R^{\frac{n-1}{2}-\alpha} \left\{ (\log R\eta)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\log \frac{R\eta}{K}}{\log R\eta} \right)^{\frac{1}{p}} - O\left(\left(\frac{1}{K} \right)^{\frac{1}{p}} \right) \right\}$$

が得られるが，この場合もまた $\lim_{t\to+\infty} \log t = +\infty$，及び $\lim_{t\to+\infty} \frac{\log \frac{t}{K}}{\log t} = 1$ に注意すると，適当に大きなある $K > 0$ をとって固定すれば，各 $0 < \eta \leqq \pi$ に対して十分大なるすべての R について

$$\left\{ \int_{\frac{K}{R} \leqq |x| \leqq \eta} | \Psi_R{}^\alpha (x) |^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \geqq C R^{\frac{n-1}{2}-\alpha} \Lambda (R\eta)$$

と出来る。以上で(6)が証明された。

次に $\Phi_R{}^\alpha (x)$ を(2)によって定義されたものとすると

$$\left\{ \int_{|x| \leqq \eta} | \Phi_R{}^\alpha (x) |^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\geqq (\sqrt{2\pi})^n \left\{ \int_{\frac{K}{R} \leqq |x| \leqq \eta} | \Psi_R{}^\alpha (x) |^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}} - \left\{ \int_{|x| \leqq \eta} | \Phi_R{}^\alpha (x) - (\sqrt{2\pi})^n \Psi_R{}^\alpha (x) |^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

において，Hölder の不等式及び補題 3 により

$$\left\{ \int_{|x| \leqq \eta} | \Phi_R{}^\alpha (x) - (\sqrt{2\pi})^n \Psi_R{}^\alpha (x) |^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqq \left\{ \int_{|x| \leqq \eta} | \Phi_R{}^\alpha (x) - (\sqrt{2\pi})^n \Psi_R{}^\alpha (x) |^2 \, dx \right\}^{\frac{1}{2}} (\Omega_n \eta^n)^{\frac{2-p}{2p}}$$

$$\leqq \| \Phi_R{}^\alpha - (\sqrt{2\pi})^n \Psi_R{}^\alpha \|_2 (\Omega_n \eta^n)^{\frac{2-p}{2p}}$$

$$= O(R^{\frac{n-1}{2}-\alpha} \eta^{\frac{2-p}{2p}})$$

である。従って(6)により

$$\left\{ \int_{|x| \leqq \eta} | \Phi_R{}^\alpha (x) |^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\geqq C R^{\frac{n-1}{2}-\alpha} \eta^{\alpha_p - \alpha} \{ \Lambda (R\eta) - O(\eta^{\frac{n(2-p)}{2p} - (\alpha_p - \alpha)}) \}$$

$$= C R^{\frac{n-1}{2}-\alpha} \eta^{\alpha_p - \alpha} \{ \Lambda (R\eta) - O(\eta^{\frac{1}{2}+\alpha}) \}$$

が得られるから，適当に小さい各 $\eta > 0$ に対して，十分大きいすべての R について

(11) $$\left\{ \int_{|x| \leqq \eta} | \Phi_R{}^\alpha (x) |^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \geqq C R^{\frac{n-1}{2}-\alpha} \eta^{\alpha_p - \alpha} \Lambda (R\eta)$$

が成り立つ。従ってこの様な η を固定すると，(2)による $S_R{}^\alpha (f_R : x) = \Phi_R{}^\alpha (x)$ と注意(5)により，十分大なるすべての R に対して

(12) $$\| S_R{}^\alpha (f_R) \|_p \geqq C_\eta R^{\frac{n-1}{2}-\alpha} \Lambda (R)$$

が得られる。

補題 1 と(12)により

$$\| S_R{}^\alpha \|^{L^p} \geqq \frac{\| S_R{}^\alpha (f_R) \|_p}{\| f_R \|_p} \geqq C R^{\frac{n-1}{2}-\alpha} \Lambda (R) R^{-\frac{n}{p'}} = C R^{\alpha_p - \alpha} \Lambda (R)$$

が得られ，定理が証明されたことになる。

引用文献

[1] K. I. BABENKO, On summability and convergence of eigenfunction expansions of a differential operator, Math. USSR Sbornik, 20 (1973), 157－211.

[2] M. KOJIMA, On the almost everywhere divergence of Bochner–Riesz means of multiple Fourier series and integrals, (to appear in Math. Japonica, 37 (1992)).

[3] E. M. STEIN, On certain exponential sums arising in multiple Fourier series, Ann. Math., 73 (1961), 87－109.

[4] E. M. STEIN AND G. WEISS, Introduction to Fourier analysis on Euclidean Spaces, Princeton, 1971.